Proseminar

Berechnung der Matrixexponentialfunktion und Anwendung auf homogene lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

TU Bergakademie Freiberg

Niklas Birk

14.06.2023 - SS23

Inhaltsverzeichnis

Literatur

Grüne, Lars und Junge, Oliver (2009). **Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme**. Vieweg+Teubner Verlag, S. 10–16.

Heuser, Harro (2009). **Gewöhnliche Differentialgleichungen. Einführung in Lehre und Gebrauch**. 6. Aufl. Vieweg+Teubner Verlag, S. 453, 460, 462.

Quellcode einsehbar unter: `https://git.niklas-birk.de/niklas/proseminar_algebra`

1 Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten und Anwendung der Matrixexponentialfunktion

Definition
Seien $u_1, \dots, u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a_{jk} \in \mathbb{R}$ für $j, k = 1, \dots, n$. Dann heiSSt

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= a_{11}u_1(t) + \cdots + a_{1n}u_n(t) \\ u_2'(t) &= a_{21}u_1(t) + \cdots + a_{2n}u_n(t) \\ &\vdots \\ u_n'(t) &= a_{n1}u_1(t) + \cdots + a_{nn}u_n(t) \end{aligned}$$

ein **homogenes lineares Differentialgleichungssystem** *(DGLS) (1. Ordnung).*
Das obige System lässt sich auch kompakt in der Form

$$\mathfrak{u}'(t) = A\mathfrak{u}(t) \tag{DGLS}$$

schreiben, wobei $\mathfrak{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}, \mathfrak{u}'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) \end{pmatrix}$ *und* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Definition
Ein DGLS zusammen mit einer Anfangsbedingung

$$\mathfrak{u}_0 := \mathfrak{u}(t_0) = \begin{pmatrix} u_{1_0} \\ \vdots \\ u_{n_0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

an einer Stelle $t_0 \in \mathbb{R}$ nennt man ein **Cauchy-Problem** *oder* **Anfangswertproblem***.*

Lemma 1.1 (Produktregel)
Sei $\mathfrak{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare vektorwertige Funktion und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine konstante Matrix. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{tA}\mathfrak{u}(t)\right) = \mathrm{e}^{tA}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{u}(t)}{\mathrm{d}t} + A\mathrm{e}^{tA}\mathfrak{u}(t).$$

Beweis. Das Ergebnis von $\mathrm{e}^{tA} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine Matrix. Demnach ist $\mathrm{e}^{tA}\mathfrak{u}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ein Matrix-Vektor-Produkt, deren Komponenten sich durch

$$(\mathrm{e}^{tA}\mathfrak{u}(t))_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{tA}\right)_{ij} \cdot u_j(t)$$

ergeben. Differenzieren der Komponenten, zusammen mit Linearität des Differentialoperators und der üblichen Produktregel, liefert

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{tA}\mathfrak{u}(t))_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{tA}\right)_{ij}\cdot u_j(t)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\mathrm{e}^{tA}\right)_{ij}\cdot\frac{\mathrm{d}u_j(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{tA}\right)_{ij}}{\mathrm{d}t}\cdot u_j(t)\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\mathrm{e}^{tA}\right)_{ij}\cdot\frac{\mathrm{d}u_j(t)}{\mathrm{d}t}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{tA}\right)_{ij}}{\mathrm{d}t}\cdot u_j(t)\right).$$

Das ist ganzheitlich betrachtet gerade

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{tA}\mathfrak{u}(t)\right) = \mathrm{e}^{tA}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{u}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{tA}}{\mathrm{d}t}\mathfrak{u}(t) = \mathrm{e}^{tA}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{u}(t)}{\mathrm{d}t} + A\mathrm{e}^{tA}\mathfrak{u}(t).$$

■

Bemerkung: Die Produktregel gilt allgemein auch für das Differenzieren von Matrizenprodukten. Seien M und N Matrizen, deren Komponenten Funktionen von t sind. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M(t)N(t)) = M(t)\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t}N(t).$$

Folgerung 1.2
Sei $\mathfrak{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ konstant und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{(t-t_0)A}\mathfrak{u}_0\right) = A\mathrm{e}^{(t-t_0)A}\mathfrak{u}_0.$$

Lemma 1.3
Seien A, B Matrizen und für diese gelte $AB = BA$. Dann gilt

$$\mathrm{e}^A B = B\mathrm{e}^A.$$

Beweis.

$$\mathrm{e}^A B = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right)B = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kB}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{BA^k}{k!} = B\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right)$$

■

Satz 1.4 (Existenz und Eindeutigkeit)
Vorgelegt sei ein CAUCHY-Problem

$$\mathfrak{u}'(t) = A\mathfrak{u}(t), \qquad \mathfrak{u}_0 \coloneqq \mathfrak{u}(t_0) = \begin{pmatrix} u_{1_0} \\ \vdots \\ u_{n_0}\end{pmatrix}. \tag{CP}$$

Dann besitzt (CP) *eine eindeutig bestimmte Lösung $\mathfrak{u}$ auf $\mathbb{R}$ mit der Form*

$$\mathfrak{u}(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}\mathfrak{u}_0. \tag{$*$}$$

Beweis.

- Existenz:
  Einsetzen von $(*)$ in die rechte Seite von (CP) liefert
  $$A\mathfrak{u}(t) = A\mathrm{e}^{(t-t_0)A}\mathfrak{u}_0.$$
  Zusammen mit Folgerung 1.2 folgt direkt, dass $(*)$ das CAUCHY-Problem löst.
- Eindeutigkeit:
  Angenommen $\mathfrak{v}(t)$ sei eine weitere Lösung, d.h. es gilt $\mathfrak{v}' = A\mathfrak{v},\ \mathfrak{v}(t_0) = \mathfrak{u}_0$. Dann ist
  $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-(t-t_0)A}\mathfrak{v}(t)\right) &\overset{\text{L1.1}}{=} \mathrm{e}^{-(t-t_0)A}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}(t)}{\mathrm{d}t} - A\mathrm{e}^{-(t-t_0)A}\mathfrak{v}(t)\\ &\overset{\text{L1.3}}{=} \mathrm{e}^{-(t-t_0)A}A\mathfrak{v}(t) - \mathrm{e}^{-(t-t_0)A}A\mathfrak{v}(t)\\ &= \mathfrak{o}.\end{aligned}$$
  Da die Ableitung die Nullmatrix ist, ist $\mathrm{e}^{-(t-t_0)A}\mathfrak{v}(t)$ konstant, d.h.
  $$\mathrm{e}^{-(t-t_0)A}\mathfrak{v}(t) = \mathfrak{c}.$$
  Die Inverse der Matrixexponentialfunktion existiert immer, weshalb
  $$\mathfrak{v}(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}\mathfrak{c}$$
  folgt. Mit Voraussetzung $\mathfrak{v}(t_0) = \mathfrak{u}_0$ gilt dann für die Konstante $\mathfrak{c}$
  $$\mathfrak{v}(t_0) = \mathrm{e}^{(t_0-t_0)A}\mathfrak{c} = E\mathfrak{c} = \mathfrak{c} = \mathfrak{u}_0.$$
  Insgesamt ergibt sich also
  $$\mathfrak{v}(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{u}(t)$$

∎

2 Berechnung der Matrixexponentialfunktion

Wie in Satz 1.4 festgestellt wurde, kann die Lösung eines CAUCHY-Problems mit der Matrixexponentialfunktion berechnet werden. In diesem Abschnitt soll nun herausgearbeitet werden, wie sich die Matrixexponentialfunktion selbst berechnen lässt.

2.1 Diagonale Matrizen

Zunächst werden diagonale Matrizen

$$A = \operatorname{diag}\{a_1, \dots, a_n\} = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

betrachtet.

Satz 2.1
Sei eine Diagonalmatrix $A = \operatorname{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$. Dann gilt für die Matrixexponentialfunktion

$$\mathrm{e}^{tA} = \operatorname{diag}\{\mathrm{e}^{ta_1}, \dots, \mathrm{e}^{ta_n}\}.$$

Beweis. Es gilt

$$A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^k \end{pmatrix}.$$

Womit für die Matrixexponentialfunktion folgt, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} && = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} a_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^k \end{pmatrix} && = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{t^k a_1^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{t^k a_n^k}{k!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta_1)^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta_n)^k}{k!} \end{pmatrix} && = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{ta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{ta_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

2.2 Diagonalisierbare Matrizen

Das Berechnen einer Matrixexponentialfunktion mit einer diagonalisierbaren Matrix A im Exponenten kann auf den obigen Fall der diagonalen Matrizen zurückgeführt werden.

Definition (Wiederholung)
Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heiSSt **diagonalisierbar***, falls eine Diagonalmatrix D und eine reguläre Matrix S so existieren, dass*

$$A = SDS^{-1}$$

gilt.

Lemma 2.2
Sei A ähnlich zu B mit $A = SBS^{-1}$. Dann gilt für die Matrixexponentialfunktion

$$\mathrm{e}^{tA} = S\mathrm{e}^{tB}S^{-1}.$$

Beweis. Zuerst wird gezeigt, dass $A^k = SB^kS^{-1}$ für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^k &= (SBS^{-1})^k = \underbrace{(SBS^{-1})(SBS^{-1})(SBS^{-1})\dots(SBS^{-1})}_{k\text{-mal}} \\ &= SB\underbrace{(S^{-1}S)}_{E}B\underbrace{(S^{-1}S)}_{E}\dots\underbrace{(S^{-1}S)}_{E}BS^{-1} = S\underbrace{B\cdots B}_{k\text{-mal}}S^{-1} \\ &= SB^kS^{-1} \end{aligned}$$

Damit folgt dann für die Matrixexponentialfunktion

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} &= \mathrm{e}^{t\cdot SBS^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\cdot SBS^{-1})^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k(SBS^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\cdot SB^kS^{-1}}{k!} \\ &= S\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kB^k}{k!}\right)S^{-1} = S\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tB)^k}{k!}\right)S^{-1} \\ &= S\mathrm{e}^{tB}S^{-1} \end{aligned}$$

■

Folgerung 2.3
Sei A diagonalisierbar mit $A = SDS^{-1}$. Dann gilt für die Matrixexponentialfunktion

$$\mathrm{e}^{tA} = S\mathrm{e}^{tD}S^{-1}.$$

Beweis. A ist nach Definition genau dann diagonalisierbar, wenn A zu einer Diagonalmatrix D ähnlich ist. Also Lemma 2.2. ■

2.3 Nicht-diagonalisierbare Matrizen

Jede quadratische Matrix A lässt sich auf eine **Jordan-Normalform** $J = S^{-1}AS$ bringen. Eine Jordan-Normalform J ist eine Blockdiagonalmatrix der Form

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$$

mit JORDAN-Block

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \qquad (i = 1, \dots, k).$$

Das folgende Lemma 2.4 lässt vermuten, dass die gewonnenen Erkenntnisse aus Unterabschnitt 2.2 zur Berechnung der Matrixexponentialfunktion $e^A = e^{SJS^{-1}}$ anwendbar sein könnten.

Lemma 2.4
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Blockdiagonalmatrix

$$A = \operatorname{diag}\{A_1, \dots, A_k\} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix},$$

mit quadratischen Matrizen $A_1, \dots, A_k$. Dann gilt

$$e^{tA} = \operatorname{diag}\left\{e^{tA_1}, \dots, e^{tA_k}\right\}.$$

Beweis. Beweis analog Satz 2.1 ■

Zudem zeigt Lemma 2.4, dass sich die Berechnung von e^J auf die einzelnen e^{J_i} für $i = 1, \dots, k$ reduzieren lässt. Dafür werden im Folgenden die JORDAN-Blöcke J_i betrachtet, denn ein JORDAN-Block J_i lässt sich weiter zerlegen in

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{pmatrix}}_{=D_i} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{=:N} = D_i + N.$$

Definition (Wiederholung)
Eine Matrix N heiSSt **nilpotent**, *falls ein $m \in \mathbb{N}$ so existiert, dass $N^m = 0$.*

Folgerung 2.5
Die $(m\times m)$-Matrix N aus der Zerlegung $J_i = D_i + N$ ist eine nilpotente Matrix mit $N^m = 0$.

Betrachtet man den Vorgang des Potenzierens von N ausführlicher, erkennt man, dass die Nebendiagonalen auf denen die 1en stehen „nach oben-rechts hinaus“ geschoben werden und ab der m-ten Potenz die Nullmatrix ist:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, N^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}, N^m = 0$$

Lemma 2.6
Die Matrizen D_i und N aus der Zerlegung $J_i = D_i + N$ kommutieren bzgl. der Matrixmultiplikation.

Beweis.

$$D_i N = (\lambda_i E) N = \lambda_i (EN) = \lambda_i (NE) = N(\lambda_i E) = N D_i,$$

■

Damit gilt

$$e^{t(D_i+N)} = e^{tD_i + tN} = e^{tD_i} e^{tN}.$$

Da D_i eine Diagonalmatrix ist, ist die Lösung von e^{tD_i} bereits aus Unterabschnitt 2.1 bekannt. Für N als nilpotente Matrix ergibt sich zudem eine endliche Summe bei der Berechnung von e^{tN}, da ab einem $m \in \mathbb{N}$ gilt, dass $N^m = N^{m+1} = \cdots = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} e^{tN} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tN)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(tN)^k}{k!} = E + tN + \frac{t^2}{2} N^2 + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} N^{m-1} \\ &= E + tN + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ & & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & & \ddots & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Für die Lösung eines CAUCHY-Problems mit einer nicht-diagonalisierbaren

Matrix $A = SJS^{-1}$ mit JORDAN-Normalform J, gilt also insgesamt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{u}(t) &= \mathrm{e}^{(t-t_0)A}\mathfrak{u}_0 = \mathrm{e}^{(t-t_0)SJS^{-1}}\mathfrak{u}_0 = S\mathrm{e}^{(t-t_0)J}S^{-1}\mathfrak{u}_0 \\
&= S\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(t-t_0)J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{(t-t_0)J_k} \end{pmatrix} S^{-1}\mathfrak{u}_0 \\
&= S\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(t-t_0)D_1}\mathrm{e}^{(t-t_0)N} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{(t-t_0)D_k}\mathrm{e}^{(t-t_0)N} \end{pmatrix} S^{-1}\mathfrak{u}_0.
\end{aligned}$$

Beispiel: Gegeben sei das CAUCHY-Problem

$$\mathfrak{u}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}}_{=:A}\mathfrak{u}(t), \;\; a \in \mathbb{R}, \qquad \mathfrak{u}_0 := \mathfrak{u}(t_0 = 0) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

A lässt sich zerlegen in eine Diagonalmatrix D und nilpotente Matrix N:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}}_{=:D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:N}$$

Nach Satz 1.4 und Abschnitt 2 ist die Lösung gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathfrak{u}(t) &= \mathrm{e}^{tA}\mathfrak{u}_0 & &= \mathrm{e}^{t(D+N)}\mathfrak{u}_0 \\
&= \mathrm{e}^{tD+tN}\mathfrak{u}_0 & &= \mathrm{e}^{tD}\mathrm{e}^{tN}\mathfrak{u}_0 \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{ta} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{ta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathfrak{u}_0 & &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{ta} & t\mathrm{e}^{ta} \\ 0 & \mathrm{e}^{ta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1\mathrm{e}^{ta} + u_2 t\mathrm{e}^{ta} \\ u_2\mathrm{e}^{ta} \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{ta}(u_1 + u_2 t) \\ u_2\mathrm{e}^{ta} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$