

Proseminar

Berechnung der Matrixexponentialfunktion und Anwendung auf homogene lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

TU Bergakademie Freiberg

Niklas Birk

14.06.2023 - SS23

Inhaltsverzeichnis

1	Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten und Anwendung der Matrixexponentialfunktion	2
2	Berechnung der Matrixexponentialfunktion	4
2.1	Diagonale Matrizen	5
2.2	Diagonalisierbare Matrizen	5
2.3	Nicht-diagonalisierbare Matrizen	6

Literatur

Grüne, Lars und Junge, Oliver (2009). **Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme.** Vieweg+Teubner Verlag, S. 10–16.

Heuser, Harro (2009). **Gewöhnliche Differentialgleichungen. Einführung in Lehre und Gebrauch.** 6. Aufl. Vieweg+Teubner Verlag, S. 453, 460, 462.

Quellcode einsehbar unter: https://git.niklas-birk.de/niklas/proseminar_algebra

1 Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten und Anwendung der Matrixexponentialfunktion

Definition

Seien $u_1, \dots, u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $a_{jk} \in \mathbb{R}$ für $j, k = 1, \dots, n$. Dann heißt

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= a_{11}u_1(t) + \dots + a_{1n}u_n(t) \\ u_2'(t) &= a_{21}u_1(t) + \dots + a_{2n}u_n(t) \\ &\vdots \\ u_n'(t) &= a_{n1}u_1(t) + \dots + a_{nn}u_n(t) \end{aligned}$$

ein **homogenes lineares Differentialgleichungssystem** (DGLS) (1. Ordnung).

Das obige System lässt sich auch kompakt in der Form

$$u'(t) = Au(t) \quad (\text{DGLS})$$

schreiben, wobei $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$, $u'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) \end{pmatrix}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Definition

Ein DGLS zusammen mit einer Anfangsbedingung

$$u_0 := u(t_0) = \begin{pmatrix} u_{1_0} \\ \vdots \\ u_{n_0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

an einer Stelle $t_0 \in \mathbb{R}$ nennt man ein **CAUCHY-Problem** oder **Anfangswertproblem**.

Lemma 1.1 (Produktregel)

Sei $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare vektorwertige Funktion und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine konstante Matrix. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} (e^{tA}u(t)) = e^{tA} \frac{du(t)}{dt} + Ae^{tA}u(t).$$

Beweis. Das Ergebnis von $e^{tA} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine Matrix. Demnach ist $e^{tA}u(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ein Matrix-Vektor-Produkt, deren Komponenten sich durch

$$(e^{tA}u(t))_i = \sum_{j=1}^n (e^{tA})_{ij} \cdot u_j(t)$$

ergeben. Differenzieren der Komponenten, zusammen mit Linearität des Differentialopera-

tors und der üblichen Produktregel, liefert

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{tA}u(t))_i &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n (e^{tA})_{ij} \cdot u_j(t) \right) = \sum_{j=1}^n \left((e^{tA})_{ij} \cdot \frac{du_j(t)}{dt} + \frac{d(e^{tA})_{ij}}{dt} \cdot u_j(t) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left((e^{tA})_{ij} \cdot \frac{du_j(t)}{dt} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{d(e^{tA})_{ij}}{dt} \cdot u_j(t) \right).\end{aligned}$$

Das ist ganzheitlich betrachtet gerade

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}u(t)) = e^{tA} \frac{du(t)}{dt} + \frac{de^{tA}}{dt} u(t) = e^{tA} \frac{du(t)}{dt} + Ae^{tA} u(t).$$

■

Bemerkung: Die Produktregel gilt allgemein auch für das Differenzieren von Matrizenprodukten. Seien M und N Matrizen, deren Komponenten Funktionen von t sind. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(M(t)N(t)) = M(t) \frac{dN(t)}{dt} + \frac{dM(t)}{dt} N(t).$$

Folgerung 1.2

Sei $u_0 \in \mathbb{R}^n$ konstant und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \left(e^{(t-t_0)A} u_0 \right) = A e^{(t-t_0)A} u_0.$$

Lemma 1.3

Seien A, B Matrizen und für diese gelte $AB = BA$. Dann gilt

$$e^A B = B e^A.$$

Beweis.

$$e^A B = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k B}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B A^k}{k!} = B \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right)$$

■

Satz 1.4 (Existenz und Eindeutigkeit)

Vorgelegt sei ein CAUCHY-Problem

$$u'(t) = Au(t), \quad u_0 := u(t_0) = \begin{pmatrix} u_{1_0} \\ \vdots \\ u_{n_0} \end{pmatrix}. \quad (\text{CP})$$

Dann besitzt (CP) eine eindeutig bestimmte Lösung u auf $\mathbb{R}$ mit der Form

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} u_0. \quad (*)$$

Beweis.

- Existenz:

Einsetzen von (*) in die rechte Seite von (CP) liefert

$$Au(t) = Ae^{(t-t_0)A}u_0.$$

Zusammen mit Folgerung 1.2 folgt direkt, dass (*) das CAUCHY-Problem löst.

- Eindeutigkeit:

Angenommen $v(t)$ sei eine weitere Lösung, d.h. es gilt $v' = Av$, $v(t_0) = u_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{-(t-t_0)A} v(t) \right) &\stackrel{L1.1}{=} e^{-(t-t_0)A} \frac{dv(t)}{dt} - Ae^{-(t-t_0)A} v(t) \\ &\stackrel{L1.3}{=} e^{-(t-t_0)A} Av(t) - e^{-(t-t_0)A} Av(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da die Ableitung die Nullmatrix ist, ist $e^{-(t-t_0)A} v(t)$ konstant, d.h.

$$e^{-(t-t_0)A} v(t) = c.$$

Die Inverse der Matrixexponentialfunktion existiert immer, weshalb

$$v(t) = e^{(t-t_0)A} c$$

folgt. Mit Voraussetzung $v(t_0) = u_0$ gilt dann für die Konstante c

$$v(t_0) = e^{(t_0-t_0)A} c = Ec = c = u_0.$$

Insgesamt ergibt sich also

$$v(t) = e^{(t-t_0)A} u_0 = u(t)$$

■

2 Berechnung der Matrixexponentialfunktion

Wie in Satz 1.4 festgestellt wurde, kann die Lösung eines CAUCHY-Problems mit der Matrixexponentialfunktion berechnet werden. In diesem Abschnitt soll nun herausgearbeitet werden, wie sich die Matrixexponentialfunktion selbst berechnen lässt.

2.1 Diagonale Matrizen

Zunächst werden diagonale Matrizen

$$A = \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\} = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

betrachtet.

Satz 2.1

Sei eine Diagonalmatrix $A = \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$. Dann gilt für die Matrixexponentialfunktion

$$e^{tA} = \text{diag}\{e^{ta_1}, \dots, e^{ta_n}\}.$$

Beweis. Es gilt

$$A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^k \end{pmatrix}.$$

Womit für die Matrixexponentialfunktion folgt, dass

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} a_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^k \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{t^k a_1^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{t^k a_n^k}{k!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta_1)^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta_n)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{ta_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

2.2 Diagonalisierbare Matrizen

Das Berechnen einer Matrixexponentialfunktion mit einer diagonalisierbaren Matrix A im Exponenten kann auf den obigen Fall der diagonalen Matrizen zurückgeführt werden.

Definition (Wiederholung)

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt **diagonalisierbar**, falls eine Diagonalmatrix D und eine reguläre Matrix S so existieren, dass

$$A = SDS^{-1}$$

gilt.

Lemma 2.2

Sei A ähnlich zu B mit $A = SBS^{-1}$. Dann gilt für die Matrixexponentialfunktion

$$e^{tA} = Se^{tB}S^{-1}.$$

Beweis. Zuerst wird gezeigt, dass $A^k = SB^kS^{-1}$ für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^k &= (SBS^{-1})^k &&= \underbrace{(SBS^{-1})(SBS^{-1})(SBS^{-1}) \dots (SBS^{-1})}_{k\text{-mal}} \\ &= SB \underbrace{(S^{-1}S)}_E B \underbrace{(S^{-1}S)}_E \dots \underbrace{(S^{-1}S)}_E BS^{-1} = S \underbrace{B \dots B}_{k\text{-mal}} S^{-1} \\ &= SB^kS^{-1} \end{aligned}$$

Damit folgt dann für die Matrixexponentialfunktion

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{t \cdot SBS^{-1}} &&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t \cdot SBS^{-1})^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (SBS^{-1})^k}{k!} &&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \cdot SB^kS^{-1}}{k!} \\ &= S \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k B^k}{k!} \right) S^{-1} = S \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tB)^k}{k!} \right) S^{-1} \\ &= Se^{tB}S^{-1} \end{aligned}$$

■

Folgerung 2.3

Sei A diagonalisierbar mit $A = SDS^{-1}$. Dann gilt für die Matrixexponentialfunktion

$$e^{tA} = Se^{tD}S^{-1}.$$

Beweis. A ist nach Definition genau dann diagonalisierbar, wenn A zu einer Diagonalmatrix D ähnlich ist. Also Lemma 2.2. ■

2.3 Nicht-diagonalisierbare Matrizen

Jede quadratische Matrix A lässt sich auf eine **JORDAN-Normalform** $J = S^{-1}AS$ bringen. Eine JORDAN-Normalform J ist eine Blockdiagonalmatrix der Form

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$$

mit JORDAN-Block

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, k).$$

Das folgende Lemma 2.4 lässt vermuten, dass die gewonnenen Erkenntnisse aus Unterabschnitt 2.2 zur Berechnung der Matrixexponentialfunktion $e^A = e^{SJS^{-1}}$ anwendbar sein könnten.

Lemma 2.4

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Blockdiagonalmatrix

$$A = \text{diag}\{A_1, \dots, A_k\} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix},$$

mit quadratischen Matrizen $A_1, \dots, A_k$. Dann gilt

$$e^{tA} = \text{diag}\{e^{tA_1}, \dots, e^{tA_k}\}.$$

Beweis. Beweis analog Satz 2.1



Zudem zeigt Lemma 2.4, dass sich die Berechnung von e^J auf die einzelnen e^{J_i} für $i = 1, \dots, k$ reduzieren lässt. Dafür werden im Folgenden die JORDAN-Blöcke J_i betrachtet, denn ein JORDAN-Block J_i lässt sich weiter zerlegen in

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{pmatrix}}_{=: D_i} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{=: N} = D_i + N.$$

Definition (Wiederholung)

Eine Matrix N heißt **nilpotent**, falls ein $m \in \mathbb{N}$ so existiert, dass $N^m = 0$.

Folgerung 2.5

Die $(m \times m)$ -Matrix N aus der Zerlegung $J_i = D_i + N$ ist eine nilpotente Matrix mit $N^m = 0$.

Betrachtet man den Vorgang des Potenzierens von N ausführlicher, erkennt man, dass die Nebendiagonalen auf denen die 1en stehen „nach oben-rechts hinaus“ geschoben werden

und ab der m -ten Potenz die Nullmatrix ist:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \dots, N^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}, N^m = 0$$

Lemma 2.6

Die Matrizen D_i und N aus der Zerlegung $J_i = D_i + N$ kommutieren bzgl. der Matrixmultiplikation.

Beweis.

$$D_i N = (\lambda_i E) N = \lambda_i (EN) = \lambda_i (NE) = N(\lambda_i E) = N D_i,$$

■

Damit gilt

$$e^{t(D_i+N)} = e^{tD_i+tN} = e^{tD_i} e^{tN}.$$

Da D_i eine Diagonalmatrix ist, ist die Lösung von e^{tD_i} bereits aus Unterabschnitt 2.1 bekannt. Für N als nilpotente Matrix ergibt sich zudem eine endliche Summe bei der Berechnung von e^{tN} , da ab einem $m \in \mathbb{N}$ gilt, dass $N^m = N^{m+1} = \dots = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} e^{tN} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tN)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(tN)^k}{k!} = E + tN + \frac{t^2}{2} N^2 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} N^{m-1} \\ &= E + tN + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ & & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & & \ddots & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Für die Lösung eines CAUCHY-Problems mit einer nicht-diagonalisierbaren

Matrix $A = SJS^{-1}$ mit JORDAN-Normalform J , gilt also insgesamt

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{(t-t_0)A} u_0 = e^{(t-t_0)SJS^{-1}} u_0 = Se^{(t-t_0)J} S^{-1} u_0 \\ &= S \begin{pmatrix} e^{(t-t_0)J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{(t-t_0)J_k} \end{pmatrix} S^{-1} u_0 \\ &= S \begin{pmatrix} e^{(t-t_0)D_1} e^{(t-t_0)N} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{(t-t_0)D_k} e^{(t-t_0)N} \end{pmatrix} S^{-1} u_0. \end{aligned}$$

Beispiel: Gegeben sei das CAUCHY-Problem

$$u'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}}_{=:A} u(t), \quad a \in \mathbb{R}, \quad u_0 := u(t_0 = 0) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

A lässt sich zerlegen in eine Diagonalmatrix D und nilpotente Matrix N :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}}_{=:D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:N}$$

Nach Satz 1.4 und Abschnitt 2 ist die Lösung gegeben durch

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{tA} u_0 &= e^{t(D+N)} u_0 \\ &= e^{tD+tN} u_0 &= e^{tD} e^{tN} u_0 \\ &= \begin{pmatrix} e^{ta} & 0 \\ 0 & e^{ta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_0 = \begin{pmatrix} e^{ta} & te^{ta} \\ 0 & e^{ta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 e^{ta} + u_2 t e^{ta} \\ u_2 e^{ta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{ta}(u_1 + u_2 t) \\ u_2 e^{ta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$