The GAME Engineers

CG #1 – Euklidische Geometrie

The forging engineers

Inhalt

- Affine Geometrie
- Skalarprodukt und Orthogonalität
- Metrische Räume
- Euklidische Geometrie
- Bewegungen in euklidischen Geometrien

The forging engineers

Affine Geometrie

“Geometrie ist die Invariantentheorie von Transformationsgruppen”
- Felix Klein, Erlanger Programm

The forging engineers

Affine Geometrie - Transformationsgruppe

(M, G, φ) ist Transformationsgruppe $:=$

1) $M \neq \emptyset$

2) G ist eine Gruppe $[(G, +)]$

3) $\varphi \in \hom(G, S(M)) \longrightarrow \varphi(a+b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$

Symmetrische Gruppe $S(M) := (\{f \mid f : M \to M \wedge f \text{ bijektiv}\}, \circ)$

d.h., der Funktionswert von φ ist eine Permutation f!

The forging engineers

Affine Geometrie - Transformationsgruppe

(M, G, φ) ist Transformationsgruppe :=

1) $M \neq \emptyset$

2) G ist eine Gruppe $[(G, +)]$

3) $\varphi \in \hom(G, S(M))$

(M, G, φ) treu := φ ist injektiv

(M, G, φ) transitiv := $\forall a, b \in M \; \exists g \in G : \; (\varphi(g))(a) = b$

φ ist eine Funktion, daher $(\varphi(g))(a) = b \to f(a) = b$

The forging engineers

Wieso so kompliziert?
M und G können sehr unterschiedlich sein (müssen keine Zahlen sein)
und φ als Abbildung bildet eben ein $g \in G$ eindeutig auf eine Funktion ab,
sodass ein vernünftige Verschiebung eines Punktes a zu b stattfinden kann.

Affine Geometrie - Transformationsgruppe

$\left(M = \mathbb{R}^3, G = \mathbb{R}^3, t\right)$ ist eine Transformationsgruppe

$$\text{mit } t : \mathbb{R}^3 \to S\left(\mathbb{R}^3\right), \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \mapsto f(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + g_1, a_2 + g_2, a_3 + g_3)$$

$$t \in \hom\left(\mathbb{R}^3, S\left(\mathbb{R}^3\right)\right) \qquad f \text{ ist bijektiv}$$

$$t(a+b) = t(a) \circ t(b) \qquad f \text{ ist surjektiv} \land f \text{ ist injektiv}$$

The forging engineers

Affine Geometrie - Transformationsgruppe

t $\in$hom $\left(\mathbb{R}^3, S\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$:

$$
\begin{aligned}
t\left(\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right) &= t\left(\begin{pmatrix} g_1 + h_1 \\ g_2 + h_2 \\ g_3 + h_3 \end{pmatrix}\right) \\
&= f(a_1, a_2, a_3) \\
&= (a_1 + (g_1 + h_1), a_2 + (g_2 + h_2), a_3 + (g_3 + h_3))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underbrace{t\left(\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}\right)}_{f} \circ \underbrace{t\left(\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right)}_{y} &= (f \circ y)(a_1, a_2, a_3) \\
&= f(y(a_1, a_2, a_3)) \\
&= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3) \\
&= (a_1 + h_1 + g_1, a_2 + h_2 + g_2, a_3 + h_3 + g_3) \\
&= (a_1 + (g_1 + h_1), a_2 + (g_2 + h_2), a_3 + (g_3 + h_3))
\end{aligned}
$$

The forging engineers

Affine Geometrie - Transformationsgruppe

f ist bijektiv:

Injektivität: Sei $f(a_1, a_2, a_3) = f(b_1, b_2, b_3)$,
dann ist $(a_1 + g_1, a_2 + g_2, a_3 + g_3) = (b_1 + g_1, b_2 + g_2, b_3 + g_3)$.
Da die Summe zweier reeller Zahlen eindeutig ist,
muss $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ und $a_3 = b_3$ gelten.
Bzw. lösen wir beispielhaft folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} a_1 + g_1 &= b_1 + g_1 \quad \mid - g_1 \\ a_1 &= b_1 \end{aligned}$$

Surjektivität: Beweis weggelassen

The forging engineers

Affine Geometrie - Transformationsgruppe

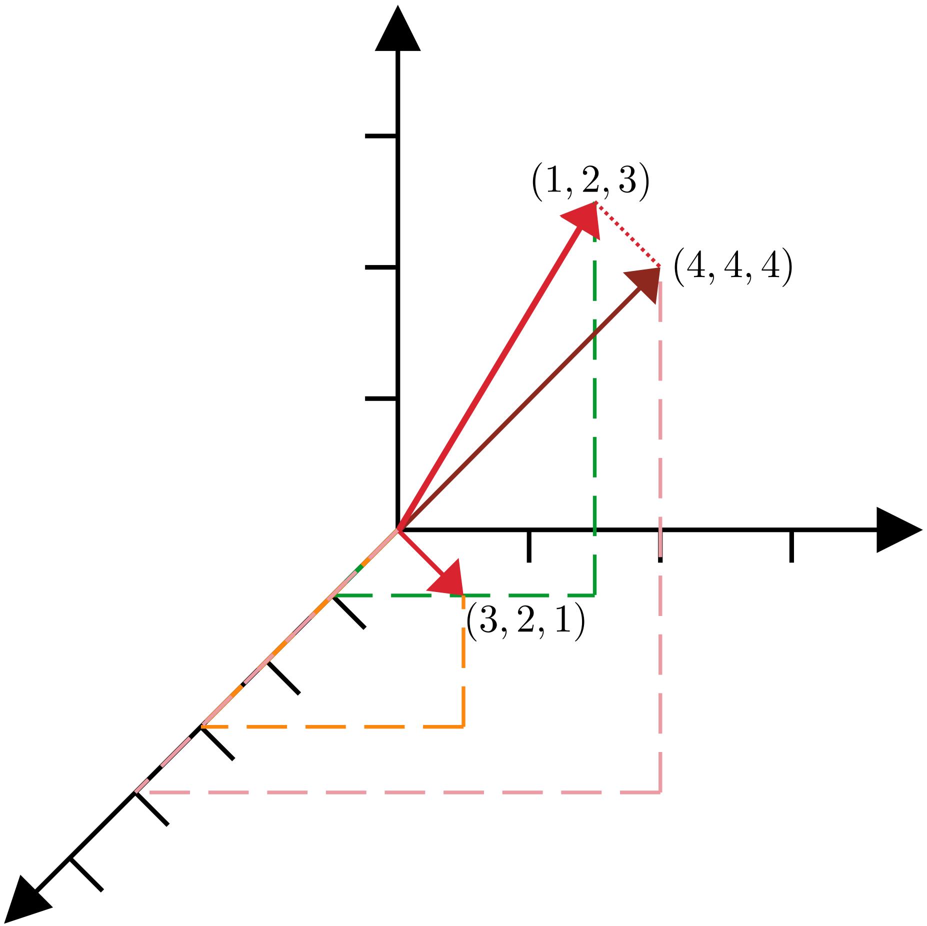
Gegeben sei der Punkt $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ und der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$t\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (a_1 + 3, a_2 + 2, a_3 + 1) = f(a_1, a_2, a_3)$$

$$\implies f(1, 2, 3) = (4, 4, 4)$$

Affine Geometrie - Transformationsgruppe

Oder halt einfach etwas informell den Punkt als Vektor auffassen:



Affine Geometrie - Transformationsgruppe

- Ihr seht, im reellen dreidimensionalen Vektorraum ist das recht einfach, da ihr das so schon in der Schule gelernt habt.

- Aber im Allgemeinen kann man eben einen beliebigen Punktraum und einen beliebigen Vektorraum haben. Mit einer geeigneten Translation lässt sich das also zu einer Transformationsgruppe machen.

The forging engineers

Affine Geometrie - Definition

(A, V, K, t) ist affine Geometrie :=

1) $A \neq \emptyset$

2) V Vektorraum über K

3) (A, V, t) ist treue, transitive Transformationsgruppe

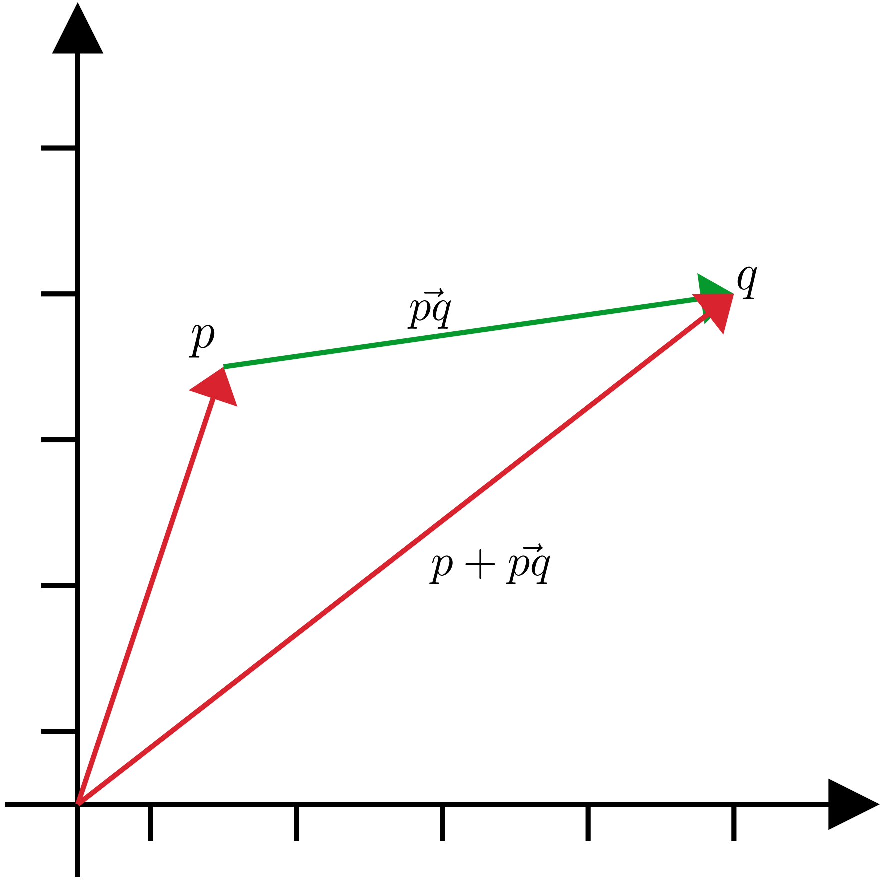
$t(\mathfrak{a})$ ist die durch $\mathfrak{a} \in V$ bewirkte Translation

Statt $(t(\mathfrak{a}))(p) = q$, schreibt man oft $p + \mathfrak{a} = q$

Ist ja so in etwa wie in der Schule, wo man $v_1 + v_2 = v_3$ rechnet,
also wo die Translation t einfach die normale Vektoraddition im $\mathbb{R}^3$ ist.

Affine Geometrie - Definition

$\vec{pq} := \mathfrak{a}$ heißt Ortsvektor und es gilt $\mathfrak{a} = q - p$



The forging engineers

Affine Geometrie - Koordinatensystem

$\Sigma = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ ist ein Koordinatensystem

$$1) \; a_0, \dots, a_n \in A \text{ sind paarweise verschieden}$$

$$2) \; \{a_0\vec{a}_1, \dots, a_0\vec{a}_n\} \text{ sind linear unabhängig}$$

a_0 heißt Ursprung, $a_0, \dots, a_n$ heißen Einheitspunkte und $a_0\vec{a}_1, \dots, a_0\vec{a}_n$ heißen Basisvektoren

Ein Punkt x hat eine eindeutige Darstellung bzgl. eines Koordinatensystems:

$$x_\Sigma = a_0 + \sum_{k=0}^{n} x_k \dots a_0\vec{a}_k$$

$$x_\Sigma = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ ist der Koordinatenvektor bzgl. } \Sigma$$

$x_1, \dots, x_n$ heißen affine Koordinaten

The forging engineers

Skalarprodukt und Orthogonalität

Sei V ein euklidischer Vektorraum, also über dem reellen Zahlenkörper.

Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt wenn gilt:

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform:

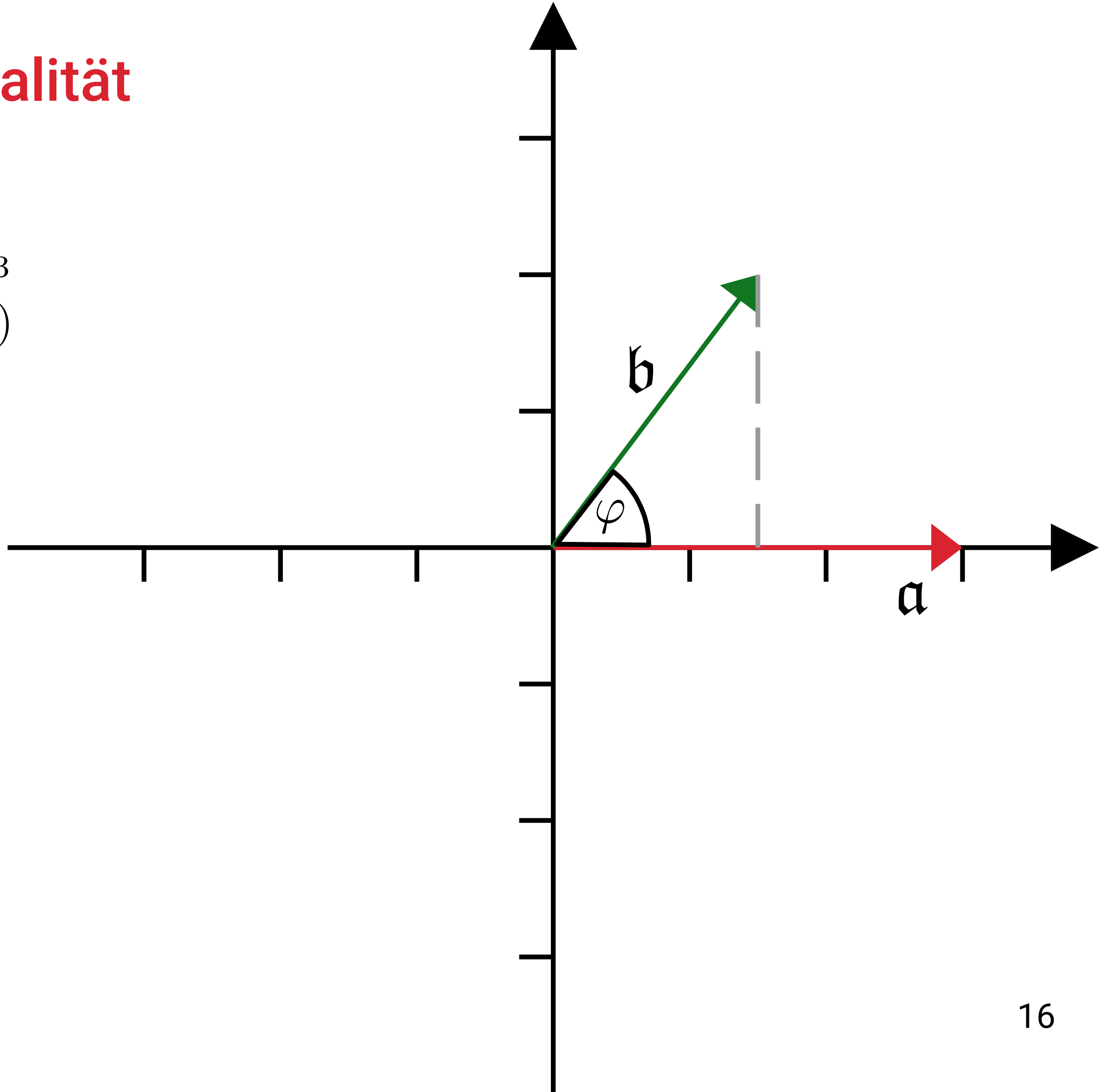
$$
\begin{aligned}
&\text{Positiv Definitheit: } && \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle \geq 0 \\
& && \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{x} = 0 \\[1em]
&\text{Symmetrie: } && \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle = \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{x} \rangle \\
&\text{Bilinearform: } && \text{Linear in beiden Argumenten} \\
& && \langle \mathfrak{x} + \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \rangle = \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z} \rangle + \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \rangle \\
& && \langle \lambda \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle = \lambda \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle \\
& && \vdots
\end{aligned}
$$

The forging engineers

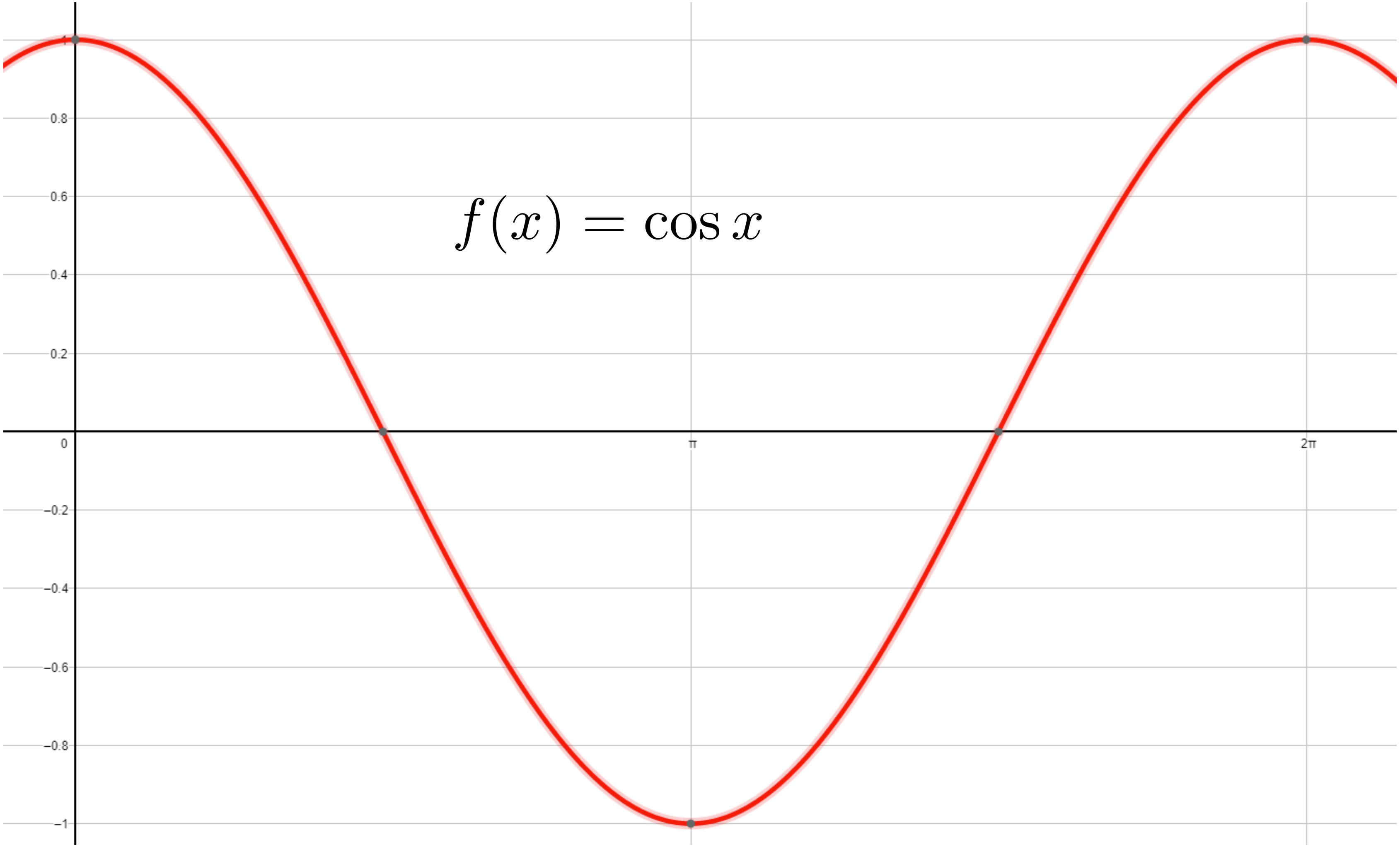
Skalarprodukt und Orthogonalität

Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ &= |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos \angle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \\ &= |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos \varphi\end{aligned}$$



Skalarprodukt und Orthogonalität

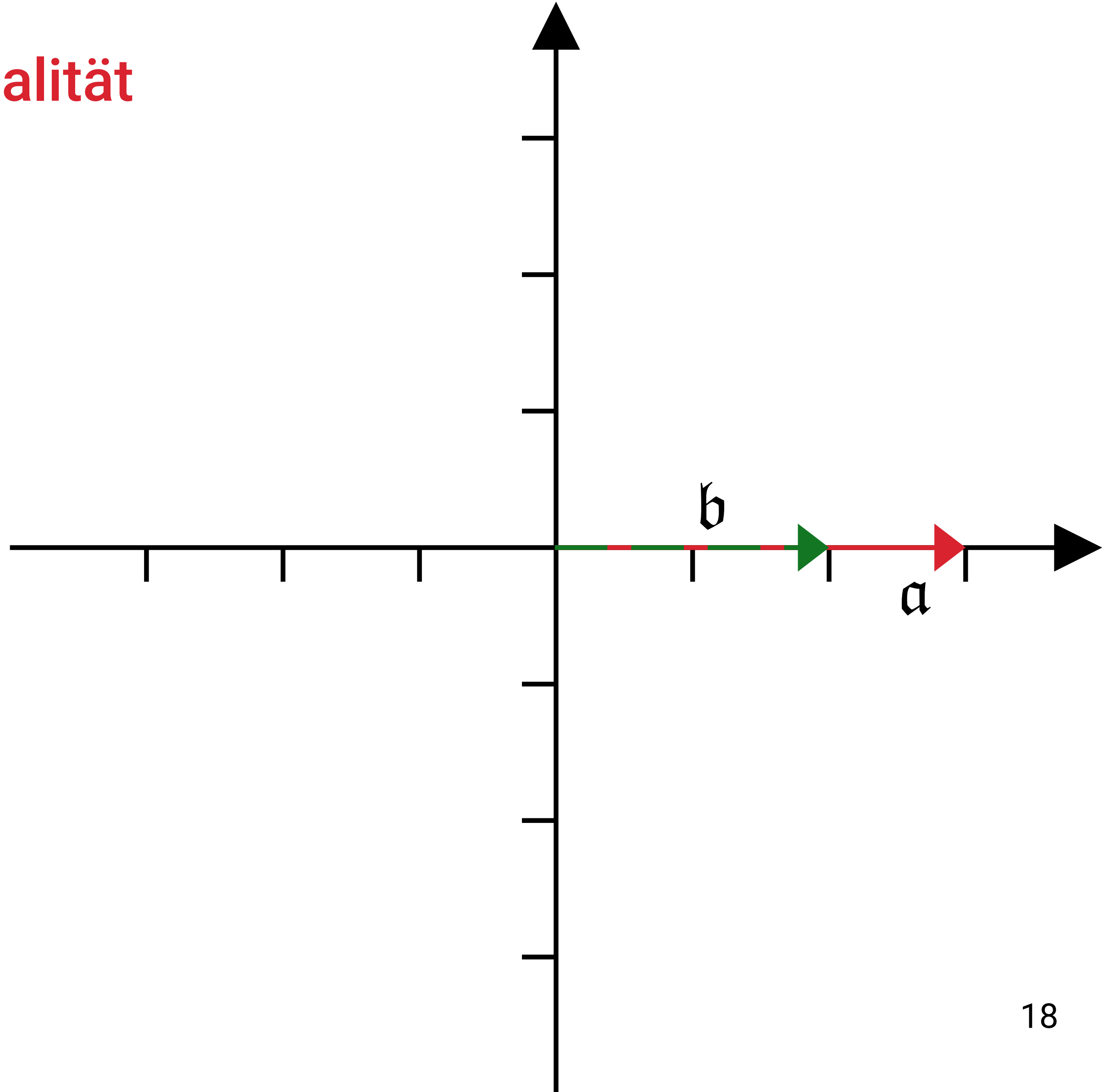


The forging engineers

Skalarprodukt und Orthogonalität

Für $\varphi = 0° = 0 \ (= 360° = 2\pi)$, ist

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle &= |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos 0 \\ &= |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot 1 \\ &= |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}|\end{aligned}$$

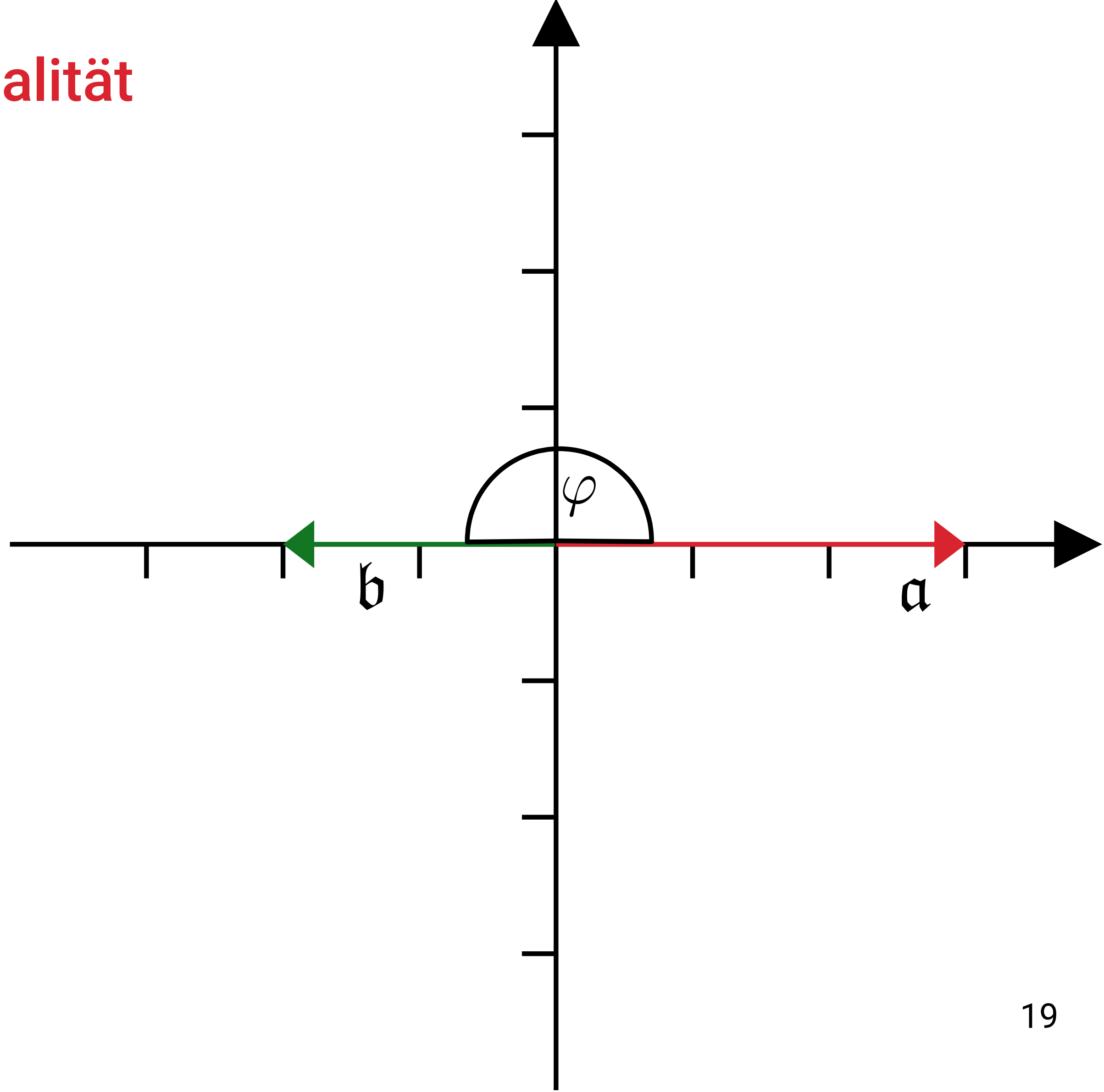


The forging engineers

Skalarprodukt und Orthogonalität

Für $\varphi = 180° = \pi$, ist

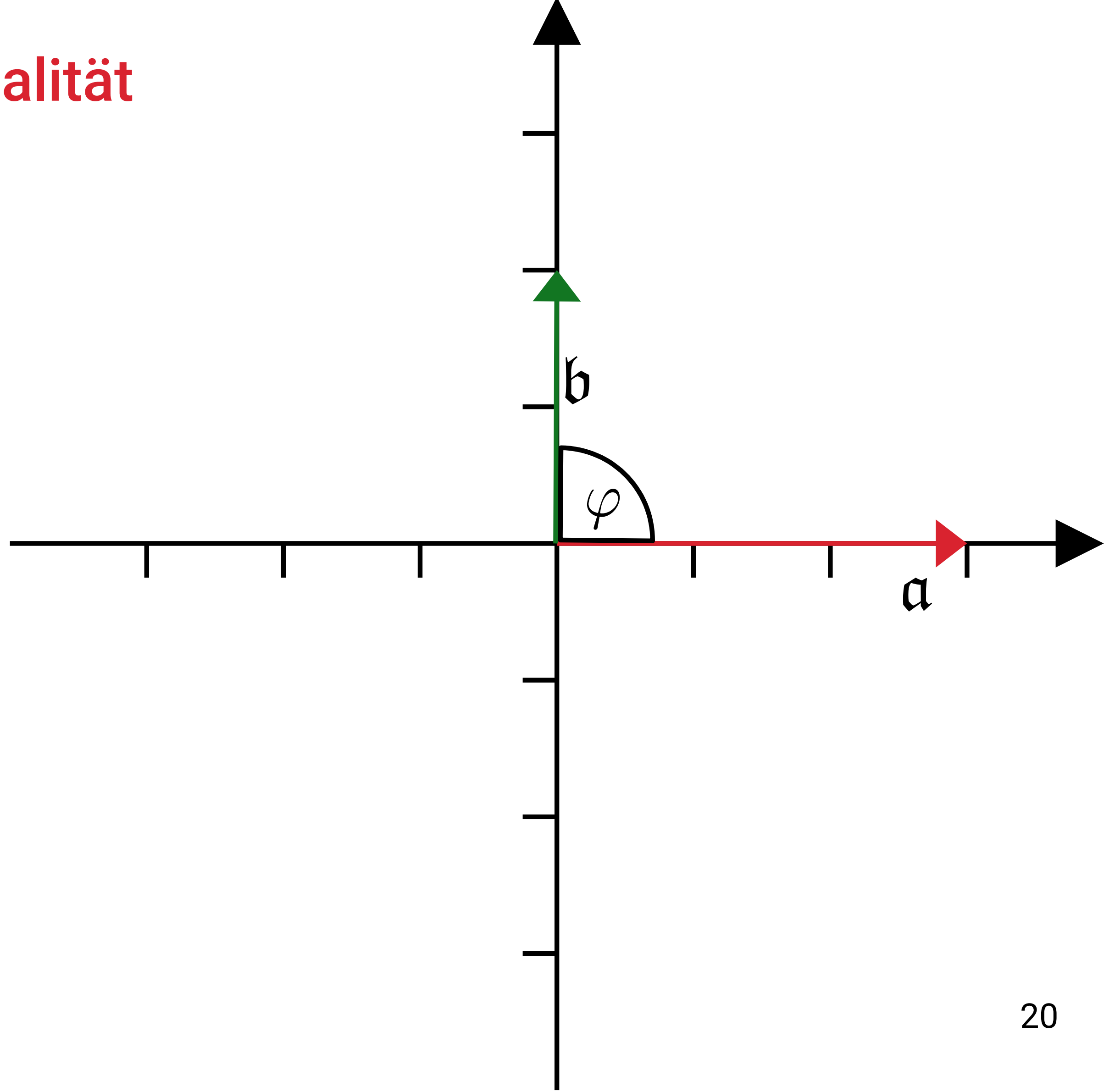
$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle &= |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos \pi \\ &= |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot 1 \\ &= |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}|\end{aligned}$$



Skalarprodukt und Orthogonalität

Für $\varphi = 90° = \frac{\pi}{2}$, ist

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle &= |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} \\ &= |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

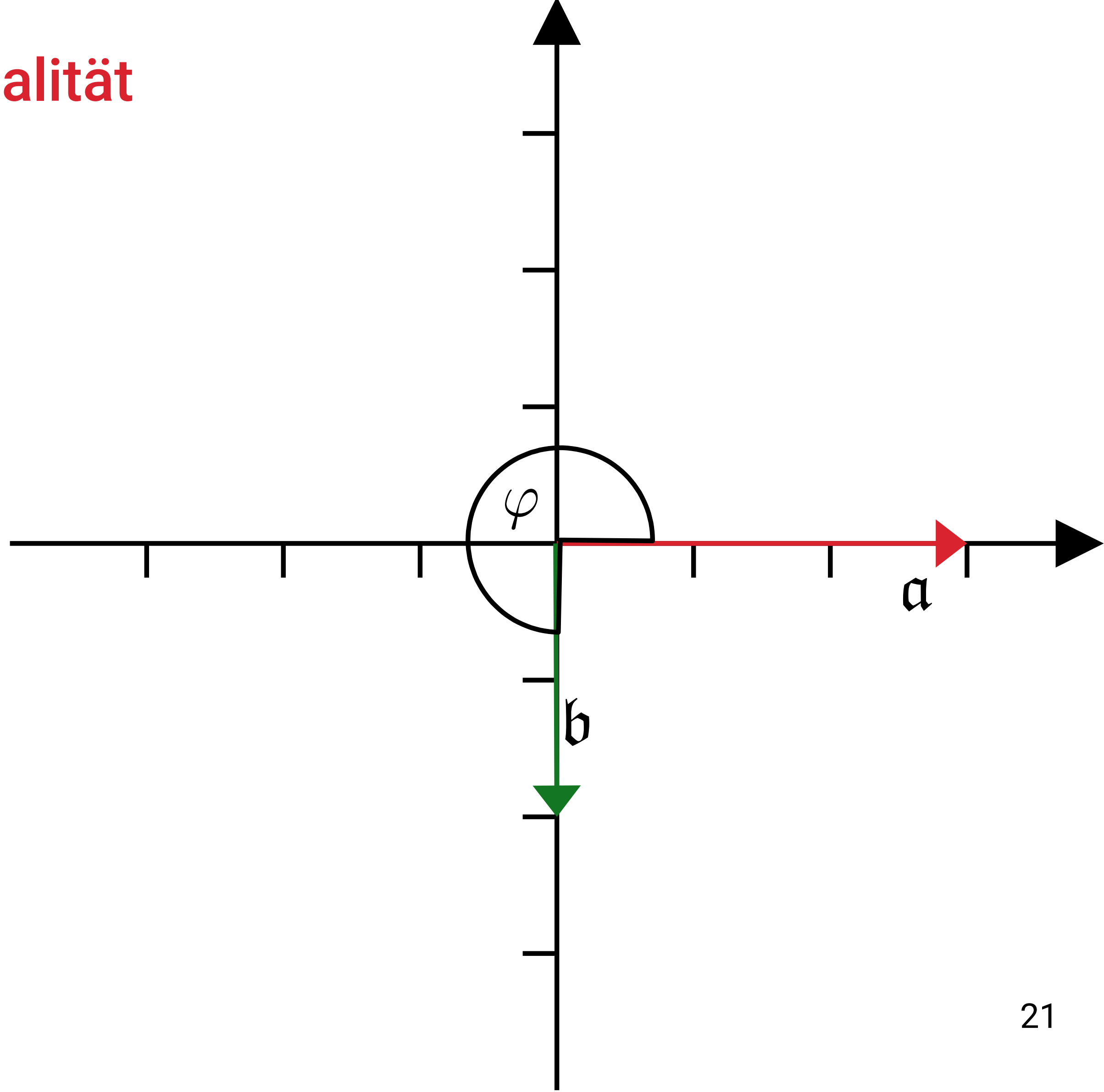


The forging engineers

Skalarprodukt und Orthogonalität

Für $\varphi = 270° = \frac{3\pi}{2}$, ist

$$
\begin{aligned}
\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle &= |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos \frac{3\pi}{2} \\
&= |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$



The forging engineers

Skalarprodukt und Orthogonalität

Zwei Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ stehen senkrecht aufeinander $(\mathfrak{a}||\mathfrak{b})$

$$\text{gdw. } \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = 0$$

Ein System von Vektoren $\{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n\}$ ist ein Orthogonalsystem,
wenn alle zueinander senkrecht sind.

Wenn alle diese Vektoren zusätzlich auf die Länge 1 normiert sind,
dann nennen wir es Orthonormalsystem.

Ist das System eine Basis, dann ist es eine Orthogonal-/Orthonormalbasis.

Nachtrag: Koordinatensystem

$\Sigma = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ ist ein Koordinatensystem

1) $a_0, \ldots, a_n \in A$ sind paarweise verschieden

2) $\{\vec{a_0 a_1}, \ldots, \vec{a_0 a_n}\}$ sind linear unabhängig

a_0 heißt Ursprung, $a_0, \ldots, a_n$ heißen Einheitspunkte und $\vec{a_0 a_1}, \ldots, \vec{a_0 a_n}$ heißen Basisvektoren

Ein Koordinatensystem Σ heißt kartesisch,

wenn $\{\vec{a_0 a_1}, \ldots, \vec{a_0 a_n}\}$ eine Orthonormalbasis ist.

Die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden eine Orthonormalbasis:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Metrische Räume

Gegeben sei eine Menge X.

Eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Metrik, wenn folgendes gilt:

$$\text{Positiv Definitheit: } d(x,y) \geq 0, \qquad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{Symmetrie: } d(x,y) = d(y,x)$$

$$\text{Dreiecksungleichung: } d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

(G, d) nennt man dann einen metrischen Raum.

$|\vec{xy}| = |\mathfrak{y} - \mathfrak{x}| = \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} (y_k - x_k)^2}$ ist die euklidische Norm oder d_2-Metrik.

Eigentlich ist eine Norm nochmal etwas spezielleres, aber das ist egal.

The forging engineers

Euklidische Geometrie - Definition

$(A, V, \mathbb{R}, t, \cdot)$ ist euklidische Geometrie :=

1) $(A, V, \mathbb{R}, t)$ ist affine Geometrie

2) V ist euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt

Das heißt, es gilt alles aus der affinen Geometrie und noch mehr.

Durch das Skalarprodukt, ergeben die Begriffe Winkel und Länge Sinn.

The forging engineers

Bewegungen in euklidischen Geometrien

Eine Funktion $f \in \mathrm{GA}(X)$ heißt euklidisch oder Bewegung :=

$$\forall x, y \in X : d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

"Längenerhaltende Abbildung" oder Isometrie genannt

Beispiele: Translationen, Drehungen, Punktspiegelung

The forging engineers

Bewegungen in euklidischen Geometrien

- Wir haben nun sehr viel abstraktes gehört, aber nichts konkretes. Die Computergrafik arbeitet aber mit etwas sehr konkretem, nämlich die Geometrie so, wie wir sie aus der Schule kennen unter dem Thema analytische Geometrie:

$$(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}, t, \cdot)$$

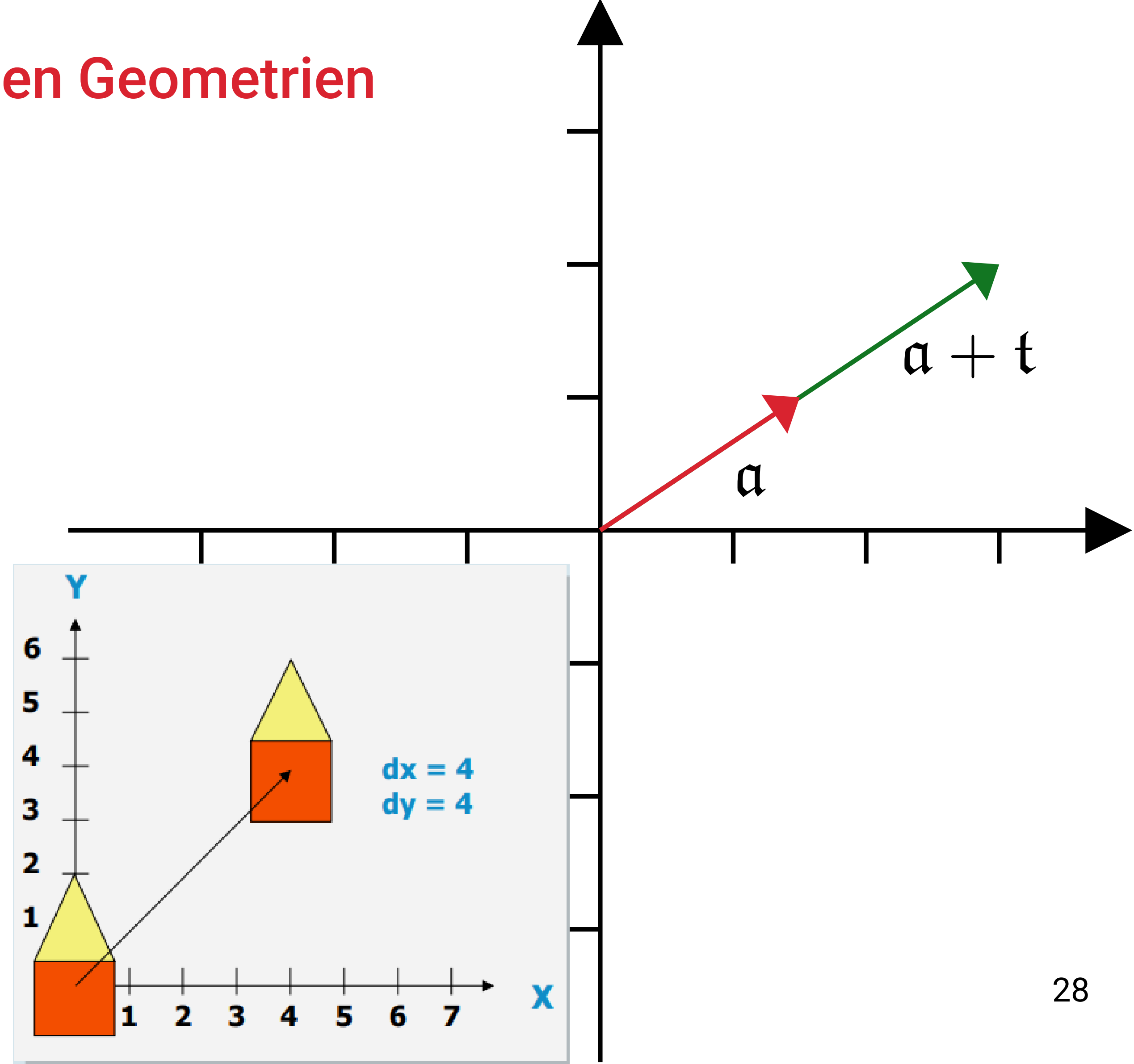
$\text{normale Vektoraddition} \quad \text{Standardskalarprodukt}$

Bewegungen in euklidischen Geometrien

$$\text{Translation:}\quad \mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{t}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + t_1 \\ a_2 + t_2 \end{pmatrix}$$



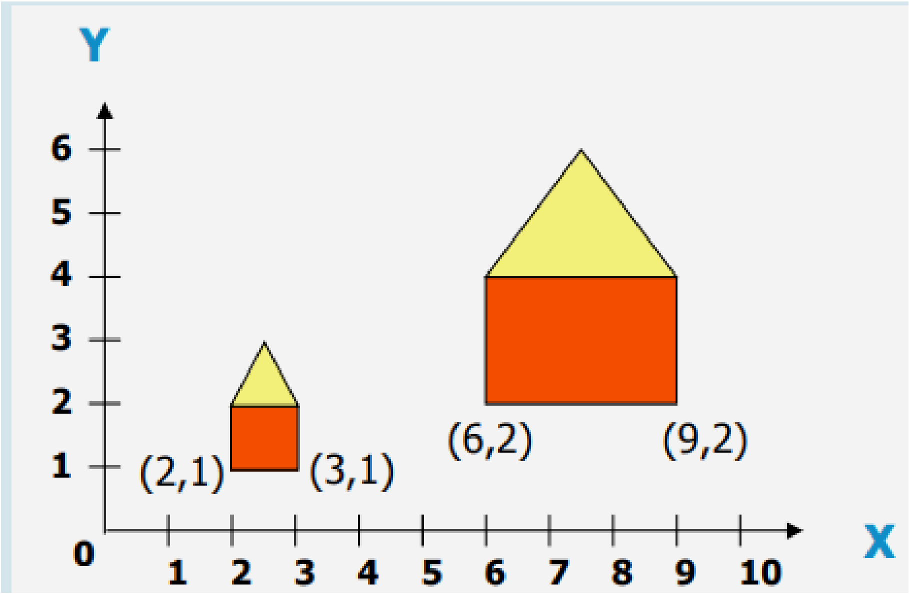
The forging engineers

Bewegungen in euklidischen Geometrien

Skalierung: $A = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s_1 \cdot a_1 \\ s_2 \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

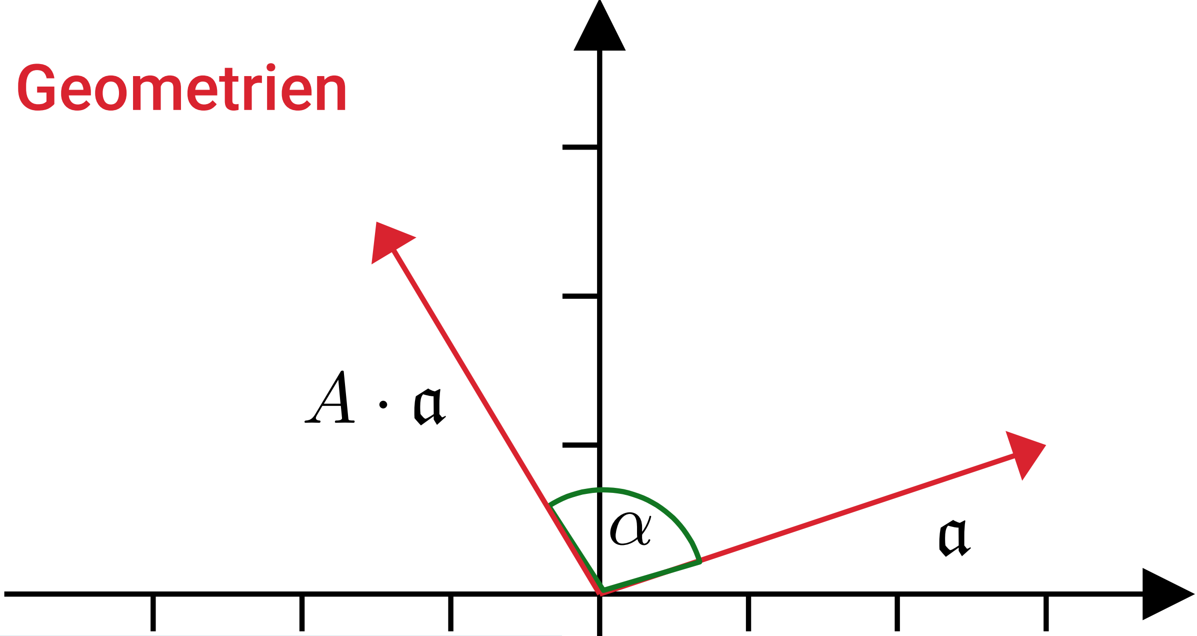


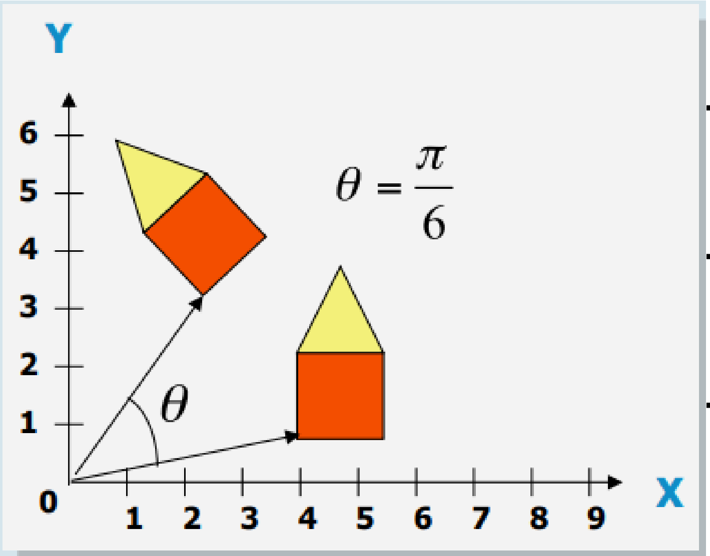
Bewegungen in euklidischen Geometrien

$$\text{Drehung: } A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \cos\alpha - a_2 \sin\alpha \\ a_1 \sin\alpha + a_2 \cos\alpha \end{pmatrix}$$





Bewegungen in euklidischen Geometrien

Das lässt sich alles auch in eine Matrix packen:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Skalierung

Rotation

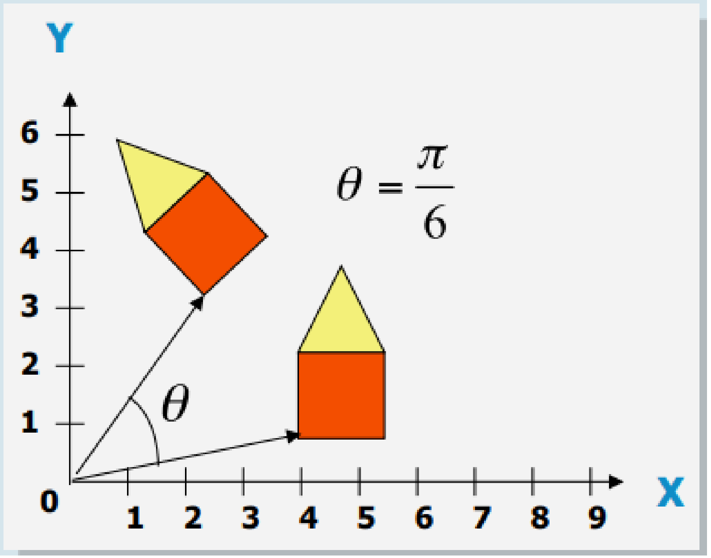
Translation

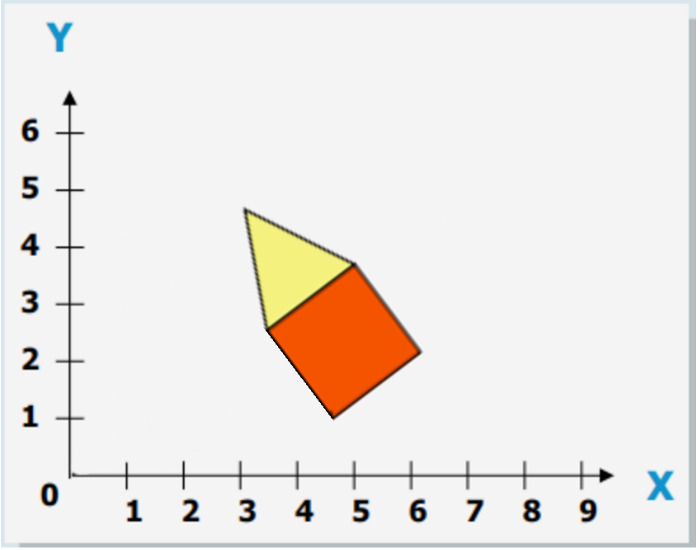
Dabei wird das ganze aber eine Dimension höher eingebettet, (homogene Koordinaten) da sonst die Translation nicht mit einer Matrixmultiplikation funktioniert.

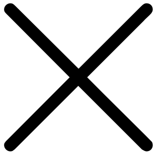
Im 3-Dimensionalen Raum würde man also eine 4×4-Matrix erhalten.

The forging engineers

Bewegungen in euklidischen Geometrien



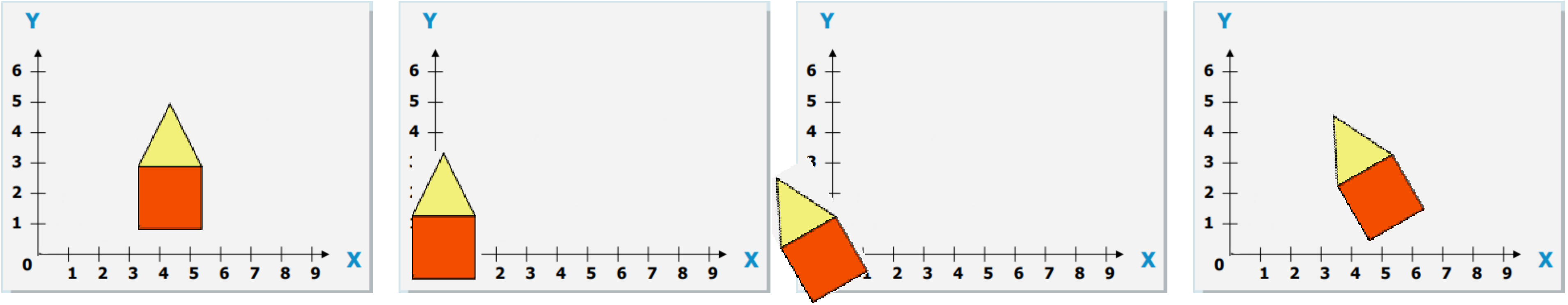




Verschiebung zum Ursprung $\rightarrow$ Rotation um Ursprung $\rightarrow$ Zurück verschieben

Bewegungen in euklidischen Geometrien

$$\underbrace{T_2 \cdot (\underbrace{R \cdot (\underbrace{T_1 \cdot \mathfrak{a}}_{\text{Translation zum Ursprung}}))}_{\text{Rotation um Ursprung}}}_{\text{Translation zurück}}$$



Ende

Fragen?

The forging engineers