The GAME Engineers

CG #8 – Matrix Aufgabe

The forging engineers

Inhalt

- Implementierung Matrixoperationen
  - Theorie und Operationen
  - Modul “matrix”

- Anwendungsbeispiel
  - Transformationen in der Ebene

Implementierung Matrixoperationen – Theorie und Operationen

Def.: $(G, \odot)$ ist abelsche Gruppe $:=$

1) G ist nichtleer

2) binäre Operation: $\odot : \; G \times G \to G, \; (a, b) \mapsto a \odot b$

3) Assoziativität: $\forall a, b \in G : \; (a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$

4) neutrales Element: $\forall a \in G : \; e \odot a = a = a \odot e$

5) inverse Elemente: $\forall a \in G \; \exists a^{-1} \in G : \; a \odot a^{-1} = e = a^{-1} \odot a$

6) Kommutativität: $\forall a, b \in G : \; a \odot b = b \odot a$

Bsp.: $(\mathbb{R} \backslash \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe:

- $(2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot (3 \cdot 4)$
- $5 \cdot 1 = 5 = 1 \cdot 5$
- $6 \cdot 6^{-1} = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1 = 6^{-1} \cdot 6 = \frac{1}{6} \cdot 6$
- $7 \cdot 8 = 56 = 8 \cdot 7$

The forging engineers

Implementierung Matrixoperationen – Theorie und Operationen

Def.: $(G, +)$ ist Modul $:=$ $(G, +)$ ist additiv geschriebene abelsche Gruppe

Einfach nur Symbolik:

	additiv	multiplikativ
Operationssymbol:	$+$	$\cdot$
neutrales Element:	Nullelement(0)	Einselement(1)
inverse Elemente:	$-a$	a^{-1}

Def.: $(K, \oplus, \odot)$ ist Körper $:=$

1) $(K, \oplus)$ ist abelsche Gruppe

2) $(K \backslash \{0\}, \odot)$ ist abelsche Gruppe

3) Distributivität: $\forall a, b, c \in K$:

$$a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$$
$$(a \oplus b) \odot c = a \odot c \oplus b \odot c$$

Implementierung Matrixoperationen – Theorie und Operationen

Def.: V ist Vektorraum über K $:=$

1) $(V, +)$ ist Modul

2) $(K, \oplus, \odot)$ ist Körper

3) äußere Multiplikation: $\cdot : K \times V \to V, \; (a, \mathfrak{x}) \mapsto a \cdot \mathfrak{x}$

- Distributiv:

$$(a \oplus b) \cdot \mathfrak{x} = a \cdot \mathfrak{x} + b \cdot \mathfrak{x}$$
$$a \cdot (\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = a \cdot \mathfrak{x} + a \cdot \mathfrak{y}$$

- Assoziativ:

$$(a \odot b) \cdot \mathfrak{x} = a \cdot (b \cdot \mathfrak{x})$$

- Einsgesetz:

$$1 \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{x}$$

The forging engineers

Implementierung Matrixoperationen – Theorie und Operationen

Def.: A ist Matrix über K :=

Seien $I, J \subseteq \mathbb{N}$ nichtleer (Indexmengen) und K Körper

Dann ist Abbildung $A: \ I \times J \to K$

Matrix vom Typ $(|I|, |J|)$ bzw. Typ $|I| \times |J|$ über K

Im endlichen Fall von $I = \{1, \dots, m\}$ und $J = \{1, \dots, n\}$, schreibt man A als:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

"$m \times n$"-Matrix (Typ): m Reihen und n Spalten

Raum der $m{\times}n$-Matrizen: $K^{m \times n} = \{A \mid A \text{ Matrix vom Typ } (m, n) \text{ über } K\}$

Implementierung Matrixoperationen – Theorie und Operationen

Vektoren aus der Schule $\mathbb{R}^n$ sind einspaltige Matrizen.
Oder ganz allgemein n-Tupelraum:

$$K^n = K^{n \times 1}$$

The forging engineers

Implementierung Matrixoperationen – Theorie und Operationen

$K^{m \times n}$ bildet mit folgenden Operationen einen Vektorraum über K:

- Matrizensumme (Vektoraddition / aus Modul): $A + B := (a_{ij} + b_{ij})$
- c-Faches (äußere Multiplikation): $c \cdot A := (c \cdot a_{ij})$

Seien $A, B \in K^{2\times 2}$ und $c \in K$:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

$$c \cdot A = c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$

Implementierung Matrixoperationen – Theorie und Operationen

Def.: $C = (c_{ij}) \in K^{m \times p}$ ist Produktmatrix von $A = (a_{ik}) \in K^{m \times n}$ mit $B = (b_{kj}) \in K^{n \times p}$:

$$C = A \cdot B$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad \text{für } i = 1, \dots, m; \; j = 1, \dots, p$$

Seien $A, B \in K^{2 \times 2}$:

„Zeile mal Spalte"

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Matrizen i.A. nicht kommutativ: $A \cdot B \neq B \cdot A$

Implementierung Matrixoperationen – Modul “matrix”

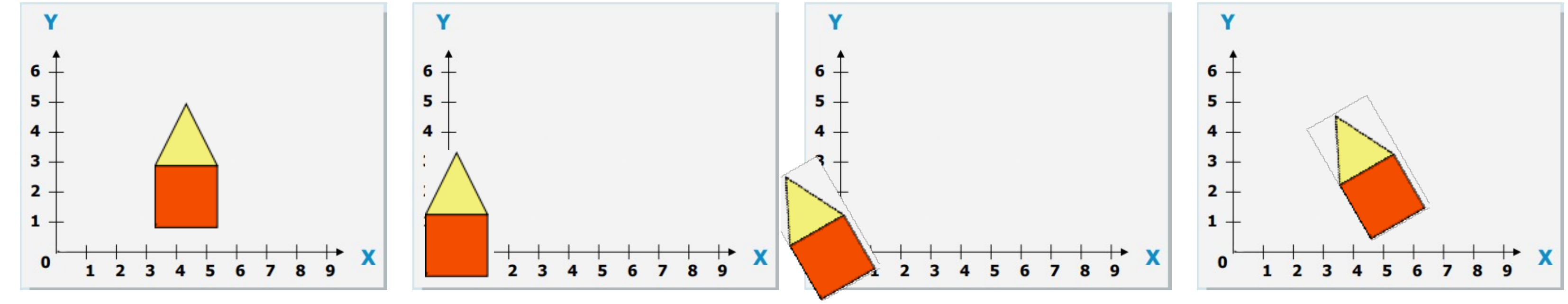
- Implementiere das Modul “matrix” (.h und .c) mit
  - Struktur “matrix” mit
    - 2D-Array
    - Typ $(n \times m)$
  - Matrixaddition
  - Äußere Multiplikation
  - Matrixmultiplikation
  - Funktionen zum anlegen und initialisieren einer Matrix (inkl. Speicherallokation)

The forging engineers

Anwendungsbeispiel – Transformationen in der Ebene

- Nutze das Modul um Transformationen in der Ebene zu machen
  - Translation
  - Skalierung
  - Rotation

$$\underbrace{T_2 + (\underbrace{R \cdot (\underbrace{T_1 + \mathfrak{a}}_{\text{Translation zum Ursprung}})}_{\text{Rotation um Ursprung}})}_{\text{Translation zurück}}$$



The forging engineers

Anwendungsbeispiel – Transformationen in der Ebene

$$\text{Translation: } \mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{t}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 + t_1 \\ a_2 + t_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Skalierung: } A = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}$$
$$A \cdot \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} s_1 \cdot a_1 \\ s_2 \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Drehung: } A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$A \cdot \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 \cos\alpha - a_2 \sin\alpha \\ a_1 \sin\alpha + a_2 \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Ende

Fragen?

The forging engineers